

1 44

2 The Necessity of a Complex-Quaternionic 3 Geometric-Algebraic Reformulation of 4 Mathematical Systems

5 Manifold Consistency from the Perspective of Time- 6 Independent Phase Equilibrium

7
Authors: Jason Kuhyun Ryoo

Affiliations: Individual researcher, private research institute Innolab Science.

Jason Kuhun Ryoo *

Innolab, 114-1303, 4-9, Jang sung Baegi_ro, DongJag_gu, Seoul, 06966, Korea

* Corresponding author Jason Kuhun Ryoo Email: jasonryoo@naver.com

8 9 Abstract

10 Conventional mathematical physics commonly describes physical systems through
11 coordinates whose states evolve with respect to an external time parameter. This approach is
12 highly effective for predicting observable trajectories, but it does not establish that time is an
13 intrinsic geometric degree of freedom of the physical state itself. This paper considers an
14 alternative starting point: **Time-Independent Phase Equilibrium (TIPE)**. Under TIPE, a
15 complete physical state is specified directly by its intrinsic amplitude, phase, phase gradient,
16 and relational phase structure, rather than by its position along an externally imposed time
17 axis.

18 A complex oscillatory state is therefore written as

19
$$\Psi(r) = A(r)e^{i\Phi(r)},$$

20 with relational phase differences

21
$$\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j,$$

22 and equilibrium characterized by the self-consistency of these relations, for example,

23 $\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$

24 or

25 $\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0.$

26 Time independence in this formulation does not imply physical immobility. Motion is
 27 represented intrinsically by spatial phase structure and relational phase alignment. The
 28 conventional stationary condition $\partial\Phi/\partial t = 0$ is consequently interpreted only as a time-
 29 coordinate representation of TIPE, not as its foundational definition.

30 From this premise, we introduce the Manifold Consistency Principle:

31 $M_{\text{math}} \cong M_{\text{phase}} \cong M_{\text{geometry}}.$

32 A mathematical state space intended to represent a complete physical state should preserve
 33 the intrinsic phase-geometric degrees of freedom of that state without unnecessary projection
 34 or quotient reduction. For systems combining three-dimensional orthogonal geometry,
 35 complex phase, orientation, noncommutative rotational composition, and multiplicative norm
 36 preservation, complex quaternion algebra $H \otimes C$ provides a natural unified representation.

37 The full biquaternion algebra is eight-dimensional over R and is not itself S^3 . Rather,
 38 normalization and TIPE constraints may select a unit-quaternionic equilibrium sector,

39 $H \otimes C \rightarrow M_{PE} \cong S^3 \cong SU(2).$

40 Within this sector, three-axis isotropy gives

41 $|i_q + j_q + k_q| = \sqrt{3},$

42 producing the normalized projection $1/\sqrt{3}$ and the characteristic angle $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.74^\circ$.
 43 Tetrahedral closure independently yields $\cos \theta = -1/3$ and $\theta \approx 109.47^\circ$, while the $SU(2)$
 44 double-cover structure naturally supports 4π spinor closure.

45 The central proposal is therefore not that conventional lower-dimensional representations are
 46 mathematically incorrect, but that a complete phase description should employ a
 47 mathematical manifold consistent with the intrinsic geometry of the represented state.
 48 Complex quaternionic geometric algebra emerges as a natural candidate for such a
 49 representation.

50

51 **1. Introduction: The Problem of the External Time Axis**

52 A mathematical representation is not identical to the physical structure it describes.
 53 Coordinates are instruments of description, and their usefulness does not by itself establish
 54 that every coordinate corresponds to an intrinsic constituent of the represented system.

55 Modern dynamics commonly takes the form

56 $X = X(r,t)$,

57 where t is treated as an independent parameter indexing successive states.

58 This representation is extremely successful for describing change. Nevertheless, a deeper
 59 question remains:

60 Is an external time coordinate necessary for specifying the complete physical state, or can the
 61 state be defined directly through its intrinsic geometric relations?

62 The distinction is fundamental.

63 A time-dependent description reconstructs a system through a sequence,

64 $X(t_1) \rightarrow X(t_2) \rightarrow X(t_3) \rightarrow \dots$,

65 whereas a phase-geometric description asks whether the essential state can instead be
 66 specified by the relations simultaneously defining the system.

67 For an oscillatory system these relations include

68 amplitude,

69 phase,

70 phase gradient,

71 relative phase,

72 orientation,

73 and geometric closure.

74 This paper adopts the second approach.

75 The fundamental methodological assumption is Time-Independent Phase Equilibrium (TIPE):

76 A complete equilibrium state can be specified through its intrinsic phase-geometric relations
 77 without requiring an external time coordinate as a constitutive degree of freedom.

This principle does not deny observed temporal change or the practical utility of time. It distinguishes the parameter used to order observations from the intrinsic variables required to define the physical state.

Once this distinction is made, the central mathematical problem changes.

The central question is therefore no longer how a state moves along an external time axis, but what intrinsic geometric relations make it self-consistent.

If physical states self-organize through energy conservation and minimum action into phase-coherent, three-dimensionally oriented structures, their mathematical representation should preserve these invariants without loss. This motivates a manifold-consistent representation, for which complex quaternionic geometric algebra emerges as a natural minimal candidate by unifying complex phase and noncommutative 3D geometry within a multiplicatively closed structure.

2. TIPE as Intrinsic Phase Geometry

Consider the complex oscillatory state

$$\Psi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\Phi(\mathbf{r})}.$$

Its local structure is characterized by

$$A(\mathbf{r}),$$

$$\Phi(\mathbf{r}),$$

and

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla\Phi(\mathbf{r}).$$

For a system of coupled oscillatory components, define

$$\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j.$$

The complete phase state may therefore be represented schematically as

$$S_{PE} = \{A(\mathbf{r}), \Phi(\mathbf{r}), \nabla\Phi(\mathbf{r}), \Delta\Phi_{ij}\}.$$

No external time variable is required in this definition.

Phase equilibrium is then characterized by relational self-consistency. A general limiting expression is

106 $\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0.$

107 For a coupled phase network, an equilibrium condition may be written as

108 $\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0.$

109 Alternatively, using a phase-energy functional E_Φ ,

110 $\delta E_\Phi = 0.$

111 These expressions describe the same methodological shift: the physical state is determined by
112 mutually consistent phase relations rather than by an externally parameterized trajectory.

113 Accordingly,

114 $\text{TIPE} \neq \text{static state}.$

115 Time independence does not imply absence of oscillation, rotation, circulation, or phase
116 structure. Instead,

117 $\text{Motion} = \text{intrinsic phase geometry} + \text{relational alignment}.$

118 The familiar condition

119 $\partial\Phi/\partial t = 0$

120 may represent a stationary state within a conventional time-dependent formalism, but it
121 should not be taken as the definition of TIPE. TIPE begins before t is introduced.

122 Thus,

123 Time-dependent formulation:

124 $\Psi = \Psi(r, t)$

125 followed by

126 $\partial\Phi/\partial t = 0$

127 is conceptually different from

128 TIPE formulation:

129 $\Psi = \Psi(r) = A(r)e^{i\Phi(r)}.$

130 The latter defines the physical state directly through its spatial and relational phase structure.

131

3. From TIPE to the Manifold Consistency Principle

If an external time axis is not required to store the complete equilibrium state, the information conventionally distributed across successive time-indexed configurations must instead be contained in the intrinsic state geometry.

This leads directly to the **Manifold Consistency Principle**.

Let

M_{math} = mathematical state manifold,

M_{phase} = intrinsic phase-state manifold,

M_{geometry} = physical geometric state manifold.

For a complete representation,

$M_{\text{math}} \cong M_{\text{phase}} \cong M_{\text{geometry}}$.

This does not require every mathematical coordinate to correspond literally to an observable spatial coordinate. Rather, it requires preservation of the intrinsic degrees of freedom and structural relations relevant to the physical state.

If

$\dim(M_{\text{rep}}) < \dim(M_{\text{intrinsic}})$,

then a mapping

$\pi: M_{\text{intrinsic}} \rightarrow M_{\text{rep}}$

necessarily suppresses some information.

The omitted structure may be irrelevant for a particular problem. In that case, projection is efficient and appropriate.

However, if the omitted information participates directly in phase coherence, orientation, or geometric closure, it must be reconstructed through additional variables, connections, coordinate patches, or transformation rules.

Thus the methodological hierarchy should be

Intrinsic physical geometry

→ complete mathematical representation

→ reduction when justified,

160 rather than

161 reduced representation
162 → reconstruction of intrinsic geometry.

163 This is the mathematical consequence of TIPE.

164

165 **4. S^2 Projection and the Preservation of Phase Information**

166 The Hopf fibration provides a clear example:

167 $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$,

168 with

169 $S^2 \cong S^3/U(1)$.

170 The projection from S^3 to S^2 is mathematically exact for the corresponding projective state.
171 However, the $U(1)$ fiber is no longer represented as an independent coordinate of each point
172 on S^2 .

173 Therefore,

174 $S^3 \rightarrow$ complete fibered state,

175 while

176 $S^2 \rightarrow U(1)$ -quotiented projective state.

177 Relative phase information can remain encoded in S^2 representations such as the Bloch
178 sphere. The point is not that S^2 eliminates every form of phase information.

179 Rather,

180 S^2 does not preserve the complete $U(1)$ fiber as part of the pointwise state representation.

181 Consequently, phenomena involving geometric phase or holonomy require additional path
182 and connection information.

183 This illustrates a general principle:

184 Projection is not mathematical error.

185 Projection is information selection.

The relevant question is whether the discarded degree of freedom is physically dispensable for the problem being considered.

For TIPE, where intrinsic phase relations constitute the state itself, preservation of the complete phase geometry becomes a primary requirement.

5. Quaternionic Closure of Three-Dimensional Geometry

Three-dimensional Euclidean geometry contains two fundamental bilinear relations between vectors u and v :

$u \cdot v$

and

$u \times v$.

These are usually introduced as separate operations.

Consider instead scalar-vector pairs

$A = (a, u)$,

$B = (b, v)$,

and define

$A \odot B = (ab - u \cdot v, av + bu + u \times v)$.

This single multiplication simultaneously contains

scalar composition,

inner-product geometry,

oriented cross-product geometry,

and scalar-vector coupling.

Because

$u \times v = -v \times u$,

the product is generally noncommutative,

211 $A \odot B \neq B \odot A.$

212 The resulting algebra satisfies

213 $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, \odot) \cong \mathbb{H},$

214 the quaternion algebra.

215 Its norm obeys

216 $N(A \odot B) = N(A)N(B).$

217 Thus quaternion multiplication provides a closed algebraic representation of

218 3D orthogonality

- 219 • orientation
- 220 • noncommutative rotation
- 221 • multiplicative norm preservation.

222 This is the essential reason quaternionic algebra is geometrically natural in the present
223 framework.

224 It is not introduced merely as an alternative notation for vectors. It provides a single
225 multiplication law in which the relevant three-dimensional geometric operations are already
226 internally closed.

227

228 **6. Complex Quaternionic Extension and the TIPE** 229 **Equilibrium Sector**

230 Real quaternions encode three-dimensional rotational geometry, but a phase-coherent
231 oscillatory state additionally requires complex phase.

232 The natural complexification is

233 $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}.$

234 A general biquaternion is

235 $Q = Z_0 + Z_1 i_q + Z_2 j_q + Z_3 k_q,$

236 where

237 $Z_\mu \in \mathbb{C}$.

238 The quaternionic bases satisfy

239 $i_q^2 = j_q^2 = k_q^2 = i_q j_q k_q = -1,$

240 while the commuting complex unit i_c satisfies

241 $i_c^2 = -1$

242 and

243 $i_c i_q = i_q i_c,$

244 $i_c j_q = j_q i_c,$

245 $i_c k_q = k_q i_c.$

246 Explicitly,

247 $Q = (W_r + i_c W_i)$

- 248 • $(X_r + i_c X_i) i_q$
249 • $(Y_r + i_c Y_i) j_q$
250 • $(Z_r + i_c Z_i) k_q.$

251 Therefore,

252 $Q \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$

253 contains eight real degrees of freedom.

254 It is important that

255 $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \neq S^3.$

256 S^3 arises from the normalized real unit-quaternion structure,

257 $q = q_0 + q_1 i_q + q_2 j_q + q_3 k_q,$

258 with

259 $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$

260 Hence

261 $\{q \in H : |q| = 1\} \cong S^3 \cong SU(2).$

262 Within the present framework, the relevant relation is therefore not an identification of the
263 full biquaternion algebra with S^3 , but a constrained reduction:

264 $H \otimes C$
265 $\rightarrow$ TIPE constraints
266 $\rightarrow$ normalization
267 $\rightarrow M_{PE}.$

268 When the resulting equilibrium sector admits a unit-quaternionic representation,

269 $M_{PE} \cong S^3 \cong SU(2).$

270 This distinction is essential.

271 Complex quaternion algebra supplies the larger phase-geometric state space; TIPE selects the
272 self-consistent physical sector.

273

274 **7. $\sqrt{3}$ Isotropy, Symmetric Closure, and 4π Topology**

275 The quaternionic spatial bases

276 i_q, j_q, k_q

277 are mutually orthogonal unit directions.

278 Their equal-weight resultant is

279 $D_3 = i_q + j_q + k_q.$

280 Therefore,

281 $|D_3|^2 = 1 + 1 + 1 = 3,$

282 and

283 $|D_3| = \sqrt{3}.$

284 The normalized isotropic direction is

285 $U_{iso} = (i_q + j_q + k_q)/\sqrt{3}.$

286 Consequently,

$$\begin{aligned} 287 \quad & \mathbf{i}_q \cdot \mathbf{U}_{iso} \\ 288 \quad & = \mathbf{j}_q \cdot \mathbf{U}_{iso} \\ 289 \quad & = \mathbf{k}_q \cdot \mathbf{U}_{iso} \\ 290 \quad & = 1/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

291 Thus

$$292 \quad \cos \theta_{iso} = 1/\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} 293 \quad & \theta_{iso} = \arccos(1/\sqrt{3}) \\ 294 \quad & \approx 54.7356^\circ. \end{aligned}$$

295 The opposite orientation gives

$$296 \quad \cos \theta_{opp} = -1/\sqrt{3},$$

$$297 \quad \theta_{opp} \approx 125.2644^\circ.$$

298 The geometric chain is therefore

$$\begin{aligned} 299 \quad & 3 \text{ orthogonal unit axes} \\ 300 \quad & \rightarrow \sqrt{3} \\ 301 \quad & \rightarrow 1/\sqrt{3} \\ 302 \quad & \rightarrow \text{isotropic angular relation.} \end{aligned}$$

303 A different but related symmetric closure appears for N equivalent unit vectors satisfying

$$304 \quad \sum_{a=1}^N \mathbf{u}_a = 0.$$

305 If all pairwise inner products are equal,

$$306 \quad \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b = -1/(N-1), \quad a \neq b.$$

307 For N = 3,

$$308 \quad \cos \theta = -1/2,$$

$$309 \quad \theta = 120^\circ,$$

310 corresponding to planar three-vector closure.

311 For N = 4,

$$312 \quad \cos \theta = -1/3,$$

313 $\theta = 109.4712^\circ$,
 314 corresponding to tetrahedral closure.
 315 Thus 120° and 109.47° are not direct projections of one another. They are distinct symmetric
 316 solutions of the same general closure condition.
 317 The unit-quaternion sector additionally possesses the topology
 318 $S^3 \cong \text{SU}(2)$.
 319 Since $\text{SU}(2)$ double-covers $\text{SO}(3)$,
 320 $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$,
 321 a spin-1/2 state satisfies
 322 $\psi(\theta + 2\pi) = -\psi(\theta)$,
 323 $\psi(\theta + 4\pi) = \psi(\theta)$.
 324 Hence
 325 $\text{SO}(3)$: 2π rotational closure,
 326 $\text{SU}(2)$ spinor state: 4π state closure.
 327 The 4π property should therefore be understood specifically as an $\text{SU}(2)$ spinor-topological
 328 result rather than as a universal property of every oscillatory system.

329

330 **8. Discussion: From Time-Indexed Dynamics to Phase-** 331 **Geometric Closure**

332 The proposed framework establishes a sequence of implications:

333 Complete physical state
 334 $\rightarrow$ intrinsic phase relations
 335 $\rightarrow$ TIPE
 336 $\rightarrow$ manifold consistency
 337 $\rightarrow$ algebraic closure
 338 $\rightarrow$ quaternionic geometry.

339 The essential methodological transition occurs at the first step.

340 If physical structure is defined primarily through
 341 $X(t)$,
 342 then the mathematical problem is trajectory evolution.
 343 If it is defined through
 344 $\Psi(r) = A(r)e^{i\Phi(r)}$
 345 and
 346 $\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$,
 347 then the fundamental problem becomes relational phase closure.
 348 Under this second description, time may remain useful as an observational parameter, but it is
 349 not required as an intrinsic coordinate of the equilibrium state.
 350 This has an important consequence for mathematical representation.
 351 A lower-dimensional projection can be entirely valid while still being incomplete for a
 352 different physical question. The appropriate criterion is therefore not whether a representation
 353 is conventional or unconventional, but whether it preserves the degrees of freedom required
 354 by the represented physical structure.
 355 For three-dimensional phase-coherent systems, the combined requirements are
 356 3D orthogonality,
 357 complex phase,
 358 orientation,
 359 noncommutative composition,
 360 norm preservation,
 361 and rotational closure.
 362 Quaternion algebra provides the closed three-dimensional product,
 363 $A \odot B = (ab - u \cdot v, av + bu + u \times v)$,
 364 with

365 $N(A \odot B) = N(A)N(B)$,

366 while complexification supplies the phase degree of freedom.

367 The resulting structure,

368 $H \otimes C$,

369 therefore provides a natural candidate for the complete algebraic state space, with TIPE and
370 normalization selecting the physically relevant equilibrium manifold.

371 This interpretation also clarifies the role of conventional mathematical structures. R^2 , C , R^3 ,
372 S^2 , $SO(3)$, matrices, tensors, and coordinate charts need not be rejected. They may instead be
373 understood as effective representations, projections, or computational realizations appropriate
374 to particular levels of description.

375 The methodological priority is simply reversed:

376 first identify the intrinsic geometry; then choose the representation.

377

378 **9. Conclusion**

379 This paper has proposed Time-Independent Phase Equilibrium as a methodological starting
380 point for the representation of phase-coherent physical systems.

381 TIPE does not mean that motion is absent, nor is it defined merely by setting a time
382 derivative to zero.

383 Rather,

384 a complete equilibrium state is defined directly through intrinsic phase-geometric relations
385 without requiring an external time coordinate as a constitutive degree of freedom.

386 The fundamental state may therefore be written as

387 $\Psi(r) = A(r)e^{i\Phi(r)}$,

388 with

389 $k(r) = \nabla\Phi(r)$,

390 $\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$,

391 and equilibrium represented by relational self-consistency such as

392 $\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$

393 or

394 $\Sigma_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0.$

395 From TIPE follows the Manifold Consistency Principle,

396 $M_{\text{math}} \cong M_{\text{phase}} \cong M_{\text{geometry}}.$

397 A complete mathematical representation should preserve the intrinsic degrees of freedom of
398 the physical phase geometry before any deliberate dimensional reduction is performed.

399 Three-dimensional orthogonality and orientation naturally generate quaternionic
400 multiplication,

401 $A \odot B = (ab - u \cdot v, av + bu + u \times v),$

402 with multiplicative norm closure,

403 $N(A \odot B) = N(A)N(B).$

404 Complexification then gives

405 $Q \in H \otimes C,$

406 while TIPE and normalization may select a unit-quaternionic equilibrium sector,

407 $H \otimes C$

408 $\rightarrow \text{TIPE}$

409 $\rightarrow M_{\text{PE}}$

410 $\cong S^3$

411 $\cong \text{SU}(2).$

412 Within this sector,

413 $|i_q + j_q + k_q| = \sqrt{3},$

414 $U_{\text{iso}} = (i_q + j_q + k_q)/\sqrt{3},$

415 $\cos \theta_{\text{iso}} = 1/\sqrt{3},$

416 and $\text{SU}(2)$ provides the topology required for 4π spinor closure.

417 The resulting structure can be summarized as

418 Energy Conservation + Minimum Action

419 → Phase Coherence + 3D Orientation + Self-Consistent Closure

420 → Time-Independent Phase Equilibrium

421 → Manifold Consistency

422 → Complex-Quaternionic Geometric Closure

423 → $S^3/SU(2)$ Equilibrium Sector.

424 This reformulation does not reject conventional mathematics; it establishes a more specific

425 criterion: a complete mathematical representation should preserve the intrinsic phase

426 geometry and its invariants without unnecessary projection. Complex quaternionic geometric

427 algebra therefore emerges as a natural minimal candidate, unifying complex phase, three-

428 dimensional geometry, noncommutative composition, and multiplicative closure within a

429 single structure.

수학 체계의 복소 쿼터니언 기하대수 기반 전환의 필요성

— 시간독립 위상평형 관점에서의 다양체 일치화론 —

Authors: Jason Kuhyun Ryoo

Affiliations: Individual researcher, private research institute Innolab Science.

Jason Kuhun Ryoo *

Innolab, 114-1303, 4-9, Jang sung Baegi_ro, DongJak_gu, Seoul, 06966, Korea

* Corresponding author Jason Kuhun Ryoo Email: jasonryoo@naver.com

초록 (Abstract)

기존 수리물리학은 일반적으로 외부 시간 매개변수에 따라 물리계의 상태가 변화하는 좌표 체계를 통해 물리계를 기술한다. 이러한 접근은 관측 가능한 궤적을 예측하는 데 매우 효과적이지만, 시간이 물리적 상태 자체를 구성하는 고유한 기하학적 자유도라는 것을 의미하지는 않는다. 본 논문은 이와 다른 출발점으로 시간독립 위상평형(Time-Independent Phase Equilibrium, TIPE)을 제시한다. TIPE 에서 완전한 물리적 상태는 외부 시간축상의 위치가 아니라 계에 내재된 진폭, 위상, 위상 기울기 및 관계적 위상구조에 의해 직접 정의된다.

복소 진동 상태는 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi(r) = A(r)e^{i\Phi(r)}$$

관계적 위상차는

$$\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$$

447 이며, 평형은 예를 들어 다음과 같은 관계적 자기정합 조건으로 표현할 수 있다.

448 $\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$

449 또는

450 $\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0$

451 이때 시간독립은 물리적 정지를 의미하지 않는다. 운동은 공간적 위상구조와
452 관계적 위상정렬에 내재적으로 표현된다. 따라서 기존 시간종속 체계의 정상상태
453 조건

454 $\partial\Phi/\partial t = 0$

455 은 TIPE 의 근본 정의가 아니라, TIPE 를 시간좌표 체계에서 표현한 하나의
456 특수한 형태로 해석된다.

457 이러한 전제로부터 본 논문은 다양체 일치 원리(Manifold Consistency Principle)를
458 제시한다.

459 $M_{\text{math}} \cong M_{\text{phase}} \cong M_{\text{geometry}}$

460 완전한 물리적 상태를 표현하려는 수학적 상태공간은 불필요한 투영이나 몫공간
461 축소 없이 그 물리계의 고유한 위상-기하학적 자유도를 보존해야 한다. 3 차원
462 직교기하, 복소 위상, 방향성, 비가환 회전 합성 및 승산적 노름 보존을 동시에
463 갖는 계에 대하여 복소 쿼터니언 대수 $H \otimes C$ 는 이들을 하나의 구조 안에서
464 표현할 수 있는 자연스러운 통합적 표현을 제공한다.

465 전체 복소 쿼터니언 대수는 실수 기준 8 차원이며 그 자체가 S^3 인 것은 아니다.
466 대신 정규화와 TIPE 조건을 통해 단위 쿼터니언 평형 섹터가 선택될 수 있다.

467 $H \otimes C \rightarrow M_{\text{PE}} \cong S^3 \cong SU(2)$

468 이 평형 섹터에서 3 축 등방성은

469 $|i_q + j_q + k_q| = \sqrt{3}$

470 을 주며, 이에 따라 정규화 투영값 $1/\sqrt{3}$ 과 특성각
 471 $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.74^\circ$
 472 가 도출된다. 사면체 폐쇄는 독립적으로
 473 $\cos \theta = -1/3$
 474 및
 475 $\theta \approx 109.47^\circ$
 476 을 제공하며, $SU(2)$ 의 이중피복 구조는 4π 스피너 폐쇄를 자연스럽게 포함한다.
 477 따라서 본 논문의 중심 명제는 기존의 저차원 표현이 수학적으로 잘못되었다는
 478 것이 아니다. 핵심은 완전한 위상상태를 기술하려는 경우 수학적 다양체가
 479 대상의 고유 기하와 일치해야 한다는 것이다. 이러한 관점에서 복소 쿼터니언
 480 기하대수는 다양체 일치적 표현을 위한 자연스러운 후보로 도출된다.

481

482 1. 서론: 외부 시간축의 문제

483 수학적 표현은 그것이 기술하는 물리적 구조 자체와 동일하지 않다. 좌표는
 484 기술을 위한 도구이며, 좌표가 유용하다는 사실만으로 각각의 좌표가 대상
 485 시스템의 고유 구성요소임을 의미하지는 않는다.

486 현대 동역학은 일반적으로 다음과 같은 형태를 취한다.

487 $X = X(r,t)$

488 여기서 t 는 연속적인 상태를 순서화하는 독립 매개변수로 사용된다.

489 이러한 표현은 변화를 기술하는 데 매우 성공적이다. 그러나 보다 근본적인
 490 질문은 여전히 남는다.

491 완전한 물리적 상태를 정의하는 데 외부 시간좌표가 반드시 필요한가, 아니면 그
 492 상태는 대상에 내재된 기하학적 관계만으로 직접 정의될 수 있는가?

 493 두 접근 사이의 차이는 근본적이다.

 494 시간종속적 기술은 시스템을 다음과 같은 상태의 연속으로 재구성한다.

 495 $X(t_1) \rightarrow X(t_2) \rightarrow X(t_3) \rightarrow \dots$

 496 반면 위상기하학적 기술은 시스템을 동시에 구성하고 있는 관계 자체를 통해 그
 497 본질적 상태를 정의할 수 있는지를 묻는다.

 498 진동계에서 이러한 관계에는 다음이 포함된다.

 499 진폭,

 500 위상,

 501 위상 기울기,

 502 상대 위상,

 503 방향성,

 504 그리고 기하학적 폐쇄.

 505 본 논문은 두 번째 접근을 채택한다.

 506 그 방법론적 출발점이 시간독립 위상평형(TIPE)이다.

 507 완전한 평형 상태는 외부 시간좌표를 구성적 자유도로 요구하지 않고, 계에
 508 내재된 위상-기하학적 관계를 통해 정의될 수 있다.

 509 이 원리는 관측되는 시간적 변화나 시간의 실용적 유용성을 부정하는 것이
 510 아니다. 관측을 순서화하기 위해 사용하는 매개변수와 물리적 상태 자체를
 511 정의하기 위해 필요한 고유 변수를 구별하는 것이다.

512 이러한 구별이 이루어지면 수학적 문제 자체가 바뀐다.

513 기본 질문은 더 이상

514 "상태가 시간축을 따라 어떻게 이동하는가?"

515 가 아니라,

516 "어떠한 기하학적 관계가 그 상태를 자기정합적으로 만드는가?"

517 가 된다.

518 이러한 궤적 재구성에서 내재적 기하 폐쇄로의 전환은 물리적 위상 다양체와
519 직접 일치하는 수학적 상태 다양체를 찾도록 요구한다.

520 따라서 물리적 상태가 에너지 보존과 최소작용에 따라 자기조직화되어
521 위상결맞음, 3 차원 방향성 및 자기정합적 폐쇄구조를 형성한다면, 이를 표현하는
522 수학 역시 이러한 고유 불변구조를 손실 없이 보존해야 한다. 복소 쿼터니언
523 기하대수는 복소 위상과 3 차원 비가환 기하를 하나의 승산적 폐쇄구조로
524 통합한다는 점에서 이에 적합한 최소의 자연적 후보가 된다.

525

526 2. 내재적 위상기하로서의 TIPE

527 복소 진동 상태를 다음과 같이 두자.

528
$$\Psi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\Phi(\mathbf{r})}$$

529 그 국소적 구조는 다음으로 특징지어진다.

530
$$A(\mathbf{r})$$

531
$$\Phi(\mathbf{r})$$

532
$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla\Phi(\mathbf{r})$$

533 다중 결합 진동계에서는 관계적 위상차를 다음과 같이 정의한다.

534 $\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$

535 따라서 완전한 위상상태는 개략적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

536 $S_{PE} = \{A(r), \Phi(r), \nabla\Phi(r), \Delta\Phi_{ij}\}$

537 이 정의에는 외부 시간변수가 필요하지 않다.

538 위상평형은 관계적 자기정합성으로 특징지어진다. 일반적인 극한 표현은

539 $\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$

540 이다.

541 결합 위상 네트워크에서는 평형조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

542 $\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0$

543 또는 위상에너지 함수 E_Φ 를 이용하여

544 $\delta E_\Phi = 0$

545 으로 표현할 수도 있다.

546 이러한 식들은 모두 동일한 방법론적 전환을 나타낸다. 즉, 물리적 상태가 외부
547 매개변수에 따른 궤적이 아니라 상호 자기정합적인 위상관계에 의해 결정된다는
548 것이다.

549 따라서

550 $TIPE \neq$ 정적 상태(static state)

551 이다.

552 시간독립은 진동, 회전, 순환 또는 위상구조가 존재하지 않는다는 뜻이 아니다.
553 오히려

554 운동 = 내재적 위상기하 + 관계적 정렬

555 로 이해된다.

556 기존 시간종속 체계에서 익숙한 조건

557 $\partial\Phi/\partial t = 0$

558 은 정상상태를 표현할 수 있지만 TIPE 자체의 정의가 되어서는 안 된다. TIPE 는
559 t 가 도입되기 이전의 상태 정의에서 출발한다.

560 따라서

561 시간종속 표현:

562 $\Psi = \Psi(r,t)$

563 에서 출발하여

564 $\partial\Phi/\partial t = 0$

565 을 부여하는 것과,

566 TIPE 표현:

567 $\Psi = \Psi(r) = A(r)e^{i\Phi(r)}$

568 은 개념적으로 다르다.

569 후자는 물리적 상태를 그 공간적·관계적 위상구조를 통해 직접 정의한다.

570

571 3. TIPE 에서 다양체 일치 원리로

572 외부 시간축이 완전한 평형상태를 저장하기 위한 필수 요소가 아니라면, 기존의
573 연속적인 시간 상태들에 분산되어 있던 물리정보는 상태 자체의 내재적 기하에
574 포함되어야 한다.

575 이로부터 다양체 일치 원리(Manifold Consistency Principle)가 직접 도출된다.

576 다음을 정의하자.

577 M_{math} = 수학적 상태 다양체

578 M_{phase} = 내재적 위상상태 다양체

579 M_{geometry} = 물리적 기하상태 다양체

580 완전한 표현에서는

581 $M_{\text{math}} \cong M_{\text{phase}} \cong M_{\text{geometry}}$

582 가 요구된다.

583 이는 모든 수학적 좌표가 문자 그대로 관측 가능한 공간좌표와 동일해야 한다는

584 의미가 아니다. 물리적 상태에 필요한 고유 자유도와 구조적 관계가 보존되어야

585 한다는 뜻이다.

586 만약

587 $\dim(M_{\text{rep}}) < \dim(M_{\text{intrinsic}})$

588 이라면 사상

589 $\pi: M_{\text{intrinsic}} \rightarrow M_{\text{rep}}$

590 은 필연적으로 일부 정보를 축소한다.

591 특정 문제에서 생략된 구조가 물리적으로 중요하지 않다면 이러한 투영은

592 효율적이고 적절하다.

593 그러나 생략된 정보가 위상 결맞음, 방향성 또는 기하학적 폐쇄에 직접

594 관여한다면 이를 추가 변수, 연결(connection), 좌표 패치 또는 변환 규칙을 통해

595 다시 복원해야 한다.

596 따라서 방법론적 순서는

597 내재적 물리기하
598 → 완전한 수학적 표현
599 → 필요한 경우 정당화된 축소

600 가 되어야 하며,

601 축소된 표현
602 → 생략된 고유기하의 사후 복원

603 이 되어서는 안 된다.

604 이것이 TIPE로부터 도출되는 수학적 귀결이다.

605

606 4. S^2 투영과 위상정보의 보존

607 홑프 올화(Hopf fibration)는 이러한 차원을 명확하게 보여준다.

608 $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$

609 그리고 이에 대응하는 몫공간 구조는

610 $S^2 \cong S^3/U(1)$

611 이다.

612 S^3 에서 S^2 로의 투영은 해당 사영 상태(projective state)를 표현하는 데 수학적으로
613 정확하다. 그러나 $U(1)$ fiber 는 더 이상 S^2 의 각 점에서 독립적인 좌표로 유지되지
614 않는다.

615 따라서

616 $S^3 \rightarrow$ 완전한 fiber 구조를 포함하는 상태

617 인 반면,

618 $S^2 \rightarrow U(1)$ 이 몫처리된 사영 상태
619 이다.
620 블로흐 구와 같은 S^2 표현에서도 상대 위상정보는 보존될 수 있다. 따라서 S^2 가
621 모든 형태의 위상정보를 제거한다고 말하는 것은 정확하지 않다.
622 핵심은 다음과 같다.
623 S^2 는 완전한 $U(1)$ fiber 를 점별 상태표현의 독립 자유도로 보존하지 않는다.
624 따라서 기하학적 위상이나 holonomy 를 다루기 위해서는 경로 및 connection 과
625 같은 추가 구조가 필요하다.
626 이는 보다 일반적인 원리를 보여준다.
627 투영은 수학적 오류가 아니다.
628 투영은 정보의 선택이다.
629 중요한 질문은 생략된 자유도가 해당 물리적 문제에서 제거 가능한가 하는
630 것이다.
631 내재적 위상관계 자체가 물리상태를 구성하는 TIPE 에서는 완전한 위상기하의
632 보존이 우선적인 요구조건이 된다.

633

634 5.3 차원 기하의 쿼터니언 폐쇄

635 3 차원 유클리드 기하에는 벡터 u 와 v 사이의 두 가지 기본적인 이중선형 관계가
636 존재한다.
637 $u \cdot v$
638 및

639 $u \times v$

640 이다.

641 기존 벡터 해석에서는 이들을 서로 다른 연산으로 도입한다.

642 이제 스칼라-벡터 쌍

643 $A = (a, u)$

644 $B = (b, v)$

645 를 생각하고 다음의 곱을 정의하자.

646 $A \odot B = (ab - u \cdot v, av + bu + u \times v)$

647 이 하나의 곱셈은 동시에 다음을 포함한다.

648 스칼라 결합,

649 내적 기하,

650 방향성을 가진 외적 기하,

651 스칼라-벡터 결합.

652 또한

653 $u \times v = -v \times u$

654 이므로 일반적으로

655 $A \odot B \neq B \odot A$

656 이며 곱셈은 비가환적이다.

657 그 결과 얻어지는 대수는

658 $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, \odot) \cong \mathbb{H}$

659 즉 쿼터니언 대수와 동형이다.

660 그 노름은 다음의 승산 관계를 만족한다.

661 $N(A \odot B) = N(A)N(B)$

662 따라서 쿼터니언 곱셈은 다음을 하나의 폐쇄된 대수구조 안에서 표현한다.

663 3D 직교성

- 664 • 방향성
- 665 • 비가환 회전
- 666 • 승산적 노름 보존

667 이것이 본 논문에서 쿼터니언 대수가 기하학적으로 자연스럽게 등장하는

668 근본적인 이유이다.

669 쿼터니언은 단순히 벡터를 대체하기 위한 다른 표기법으로 도입되는 것이

670 아니다. 필요한 3 차원 기하연산들이 이미 하나의 곱셈법 안에서 내부적으로

671 폐쇄되어 있다는 데 그 의미가 있다.

672

673 6. 복소 쿼터니언 확장과 TIPE 평형 섹터

674 실수 쿼터니언은 3 차원 회전기하를 표현하지만 위상 결맞음을 가진 진동 상태는

675 추가적으로 복소 위상을 요구한다.

676 이에 따른 자연스러운 복소화는

677 $H_C = H \otimes C$

678 이다.

679 일반적인 복소 쿼터니언은

$$Q = Z_0 + Z_1 i_q + Z_2 j_q + Z_3 k_q$$

로 표현되며,

$$Z_\mu \in \mathbb{C}$$

이다.

쿼터니언 기저는

$$i_q^2 = j_q^2 = k_q^2 = i_q j_q k_q = -1$$

을 만족하고, 가환하는 복소 허수단위 i_c 는

$$i_c^2 = -1$$

및

$$i_c i_q = i_q i_c$$

$$i_c j_q = j_q i_c$$

$$i_c k_q = k_q i_c$$

를 만족한다.

이를 실수와 허수 성분으로 전개하면

$$Q = (W_r + i_c W_i)$$

$$\bullet (X_r + i_c X_i) i_q$$

$$\bullet (Y_r + i_c Y_i) j_q$$

$$\bullet (Z_r + i_c Z_i) k_q$$

가 된다.

따라서

$$Q \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$$

는 실수 기준 8 개의 자유도를 갖는다.

702 여기서 중요한 것은

703 $H \otimes C \neq S^3$

704 이라는 사실이다.

705 S^3 는 정규화된 실수 단위 쿼터니언 구조

706 $q = q_0 + q_1 i_q + q_2 j_q + q_3 k_q$

707 및

708 $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$

709 에서 발생한다.

710 따라서

711 $\{q \in H : |q| = 1\} \cong S^3 \cong SU(2)$

712 이다.

713 그러므로 본 논문의 핵심 관계는 전체 복소 쿼터니언 대수를 S^3 와 동일시하는
714 것이 아니라 다음과 같은 구속된 선택구조이다.

715 $H \otimes C$

716 $\rightarrow$ TIPE 조건

717 $\rightarrow$ 정규화

718 $\rightarrow M_{PE}$

719 그리고 이 평형 섹터가 단위 쿼터니언 표현을 허용할 경우

720 $M_{PE} \cong S^3 \cong SU(2)$

721 가 된다.

722 이 구별은 중요하다.

723 복소 쿼터니언 대수는 보다 큰 위상-기하학적 상태공간을 제공하고, TIPE 는 그
724 가운데 자기정합적인 물리적 평형 섹터를 선택한다.

725

726 7. $\sqrt{3}$ 등방성, 대칭 폐쇄 및 4π 위상구조

727 쿼터니언 공간기저

728 i_q, j_q, k_q

729 는 서로 직교하는 단위 방향이다.

730 세 축의 동일 가중 합을

731 $D_3 = i_q + j_q + k_q$

732 라고 하면,

733 $|D_3|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$

734 이므로

735 $|D_3| = \sqrt{3}$

736 이다.

737 정규화된 등방 방향은

738 $U_{iso} = (i_q + j_q + k_q)/\sqrt{3}$

739 이다.

740 따라서

741 $i_q \cdot U_{iso}$

742 $= j_q \cdot U_{iso}$

743 $= k_q \cdot U_{iso}$

744 $= 1/\sqrt{3}$

745 이고,

746 $\cos \theta_{\text{iso}} = 1/\sqrt{3}$

747 $\theta_{\text{iso}} = \arccos(1/\sqrt{3})$

748 $\approx 54.7356^\circ$

749 가 된다.

750 반대 방향에서는

751 $\cos \theta_{\text{opp}} = -1/\sqrt{3}$

752 $\theta_{\text{opp}} \approx 125.2644^\circ$

753 이다.

754 따라서 기하학적 연쇄는

755 3 개의 직교 단위축

756 $\rightarrow \sqrt{3}$

757 $\rightarrow 1/\sqrt{3}$

758 $\rightarrow$ 등방 각관계

759 로 정리된다.

760 이와 구별되는 대칭 폐쇄구조는 N 개의 동등한 단위벡터가

761 $\sum_{a=1}^N \mathbf{u}_a = 0$

762 을 만족하는 경우에 나타난다.

763 모든 벡터쌍의 내적이 동일하다면

764 $\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b = -1/(N-1), a \neq b$

765 가 된다.

766 $N = 3$ 이면

767 $\cos \theta = -1/2$

768 $\theta = 120^\circ$

769 이며, 이는 평면의 3 벡터 폐쇄에 해당한다.

770 $N = 4$ 이면

771 $\cos \theta = -1/3$

772 $\theta = 109.4712^\circ$

773 이며, 이는 사면체 폐쇄에 해당한다.

774 따라서 120° 와 109.47° 는 서로의 직접적인 투영 결과가 아니다. 두 각은 동일한
775 일반 대칭 폐쇄조건에서 서로 다른 차원적 구성으로 나타나는 독립적인 해이다.

776 단위 쿼터니언 섹터는 또한

777 $S^3 \cong SU(2)$

778 의 위상구조를 갖는다.

779 $SU(2)$ 는 $SO(3)$ 를 이중피복하므로

780 $SU(2) \rightarrow SO(3)$

781 $\text{spin-}1/2$ 상태에서는

782 $\psi(\theta + 2\pi) = -\psi(\theta)$

783 $\psi(\theta + 4\pi) = \psi(\theta)$

784 가 성립한다.

785 따라서

786 $SO(3)$: 2π 회전 폐쇄

787 $SU(2)$ spinor state: 4π 상태 폐쇄

788 로 구별된다.

789 그러므로 4π 구조는 모든 진동계의 보편적 성질로 확대해서 해석하기보다는
790 $SU(2)$ 스핀너 위상구조의 고유한 결과로 이해해야 한다.

791

792 8. 논의: 시간 인덱스 동역학에서 위상기하학적 793 폐쇄로

794 본 논문의 구조는 다음과 같은 논리적 귀결을 갖는다.

795 완전한 물리적 상태

796 → 내재적 위상관계

797 → TIPE

798 → 다양체 일치

799 → 대수적 폐쇄

800 → 쿼터니언 기하

801 가장 중요한 방법론적 전환은 첫 단계에서 이루어진다.

802 물리적 구조를

803 $X(t)$

804 를 중심으로 정의하면 수학적 문제는 궤적의 시간적 변화가 된다.

805 반면 이를

806 $\Psi(r) = A(r)e^{i\Phi(r)}$

807 및

808 $\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$

809 로 정의하면 근본 문제는 관계적 위상 폐쇄가 된다.

810 후자의 기술에서 시간은 여전히 관측을 위한 유용한 매개변수가 될 수 있지만,
 811 평형상태를 구성하는 고유좌표일 필요는 없다.

 812 이는 수학적 표현에 중요한 귀결을 가져온다.

 813 저차원 투영은 완전히 타당하면서도 다른 물리적 문제에 대해서는 불완전할 수
 814 있다. 따라서 적절한 판단기준은 어떤 표현이 기존적인가 새로운가가 아니라, 그
 815 표현이 대상의 물리구조에 필요한 자유도를 보존하는가이다.

 816 3 차원 위상 결맞음 계에서 요구되는 구조는 다음과 같다.

 817 3D 직교성,

 818 복소 위상,

 819 방향성,

 820 비가환 합성,

 821 노름 보존,

 822 회전 폐쇄.

 823 쿼터니언 대수는

 824 $A \odot B = (ab - u \cdot v, av + bu + u \times v)$

 825 라는 폐쇄된 3 차원 곱셈과

 826 $N(A \odot B) = N(A)N(B)$

 827 라는 승산적 노름 보존을 제공한다.

 828 여기에 복소화를 적용하면 위상 자유도가 결합된다.

 829 따라서

830 $H \otimes C$

831 는 완전한 대수적 상태공간을 위한 자연스러운 후보가 되며, TIPE 와 정규화
832 조건은 이 가운데 물리적으로 관련된 평형 다양체를 선택한다.

833 이러한 해석은 기존 수학구조의 역할도 명확하게 한다. $R^2, C, R^3, S^2, SO(3)$, 행렬,
834 텐서 및 좌표차트는 폐기되어야 할 대상이 아니다. 특정 기술 수준에서 유효한
835 표현, 투영 또는 계산적 구현으로 이해할 수 있다.

836 방법론적 우선순위만 바뀐다.

837 먼저 내재적 기하를 확인하고, 그 다음 표현을 선택한다.

838

839 9. 결론

840 본 논문은 위상 결맞음 물리계를 표현하기 위한 방법론적 출발점으로 시간독립
841 위상평형(TIPE)을 제시하였다.

842 TIPE 는 운동이 존재하지 않는다는 의미가 아니며, 단순히 시간미분을 0 으로
843 설정하는 것으로 정의되지 않는다.

844 그 핵심은 다음과 같다.

845 완전한 평형상태는 외부 시간좌표를 구성적 자유도로 요구하지 않고 대상에
846 내재된 위상-기하학적 관계를 통해 직접 정의된다.

847 따라서 기본 상태는

848
$$\Psi(r) = A(r)e^{i\Phi(r)}$$

849 로 표현되고,

850
$$k(r) = \nabla\Phi(r)$$

851
$$\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$$

852 및

853 $\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$

854 또는

855 $\sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0$

856 과 같은 관계적 자기정합 조건을 통해 평형이 정의된다.

857 TIPE로부터 다양체 일치 원리가 도출된다.

858 $M_{\text{math}} \cong M_{\text{phase}} \cong M_{\text{geometry}}$

859 완전한 수학적 표현은 의도적인 차원축소를 수행하기 이전에 물리적 위상기하의

860 고유 자유도를 보존해야 한다.

861 3 차원 직교성과 방향성은 자연스럽게 쿼터니언 곱셈

862 $A \odot B = (ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, a\mathbf{v} + b\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v})$

863 을 생성하고, 그 노름은

864 $N(A \odot B) = N(A)N(B)$

865 이라는 승산적 폐쇄를 갖는다.

866 복소화를 통해

867 $Q \in H \otimes C$

868 가 얻어지고, TIPE 와 정규화 조건은 단위 쿼터니언 평형 섹터를 선택할 수 있다.

869 $H \otimes C$

870 $\rightarrow \text{TIPE}$

871 $\rightarrow M_{\text{PE}}$

872 $\cong S^3$

873 $\cong \text{SU}(2)$

874 이 섹터에서

875 $|i_q + j_q + k_q| = \sqrt{3}$

876 $U_{iso} = (i_q + j_q + k_q)/\sqrt{3}$

877 $\cos \theta_{iso} = 1/\sqrt{3}$

878 이 성립하며, $SU(2)$ 는 4π 스핀너 폐쇄에 필요한 위상구조를 제공한다.

879 따라서 전체 논리구조는 다음과 같이 압축된다.

880 내재적 위상기하

881 → 시간독립 위상평형

882 → 다양체 일치

883 → 쿼터니언 기하 폐쇄

884 → 복소 위상 확장

885 → $S^3/SU(2)$ 평형 섹터

886 본 논문이 제안하는 전환은 기존 수학체계가 잘못되었다는 주장이 아니다. 보다

887 구체적인 기준을 제시하는 것이다.

888 수학적 표현의 차원과 대수구조는 그것이 표현하는 물리적 상태의 고유

889 위상기하와 일치해야 한다.

890 따라서 본 논문의 물리적 논리는 두 층위로 압축된다.

891 에너지 보존 + 최소작용

892 → 위상결맞음 + 3 차원 방향성 + 자기정합적 폐쇄

893 완전한 수리언어는 불필요한 투영 없이 이 고유구조를 보존해야 한다. 복소

894 쿼터니언 기하대수는 복소 위상, 3 차원 기하, 비가환 합성 및 승산적 폐쇄를

895 하나의 표현체계로 결합한다는 점에서 그 최소의 자연적 후보가 된다.

896